Séries entières, le retour

24 janvier 2019

1 Séries entières

1.1 PC

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ bornée telle que $u_n + \frac{u_{3n}}{3} \to 1$ quand $n \to +\infty$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $u_n z^n$.

1.2

Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ avec ; $a_n = (2+\sqrt{3})^n$ puis $a_n = d((2+\sqrt{3})^n, \mathbb{Z})$.

1.3

Soit a_n une suite réelle strictement positive, telle que :
la série $\sum a_n$ diverge ; la suite $\frac{a_n}{A_n}$ tend vers 0.
Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

1.4

Etudier la série entière $\sum \frac{z^n}{n sin(n\pi\sqrt{3})}$. Rayon de convergence, convergence sur le bord du disque de convergence.

2 Fonctions série entière

2.1

On note Q_m la n-ième somme partielle de la série exponentielle. Soit P un polynôme réel tel que, pour tout x réel positif, on ait $P(x) < e^x$. Montrer qu'il existe un m tel que, pour tout x réel positif, on ait $Q_m(x) > P(x)$.

2.2

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière vérifiant $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$, $\sum n|a_n|$ converge et $|a_1| \geq \sum_{n=2}^{+\infty} n|a_n|$. Montrer que le rayon de convergence de cette série est ≥ 1 et que sa somme f est injective sur $D(0,1)$.

$\sum_{k=0}^{p-1} \zeta^{\ell k} \sum_{m=0}^{+\infty} a_{pm+k} \zeta^{pm+k}$

$= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{p-1} \zeta^{\ell k} a_{pm+k} \zeta^{pm+k}$

2.3 Une sorte de Cesaro.

a) Principe de Weierstrass : Soit $a_{n,k}$ une suite double complexe telle que, pour tout k, $n \to a_{n,k}$ converge vers un nombre b_k et soit bornée par un nombre positif α_k. On suppose de plus que la série $\sum \alpha_k$ converge. Montrer que la suite des sommes $S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k}$ tend vers $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$.
b)Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 de somme f, et b_n une suite complexe telle que $\forall n, b_n \neq 0$ et $\lim \frac{b_{n-1}}{b_n} = \beta$ avec $|\beta| < 1$. On considère $c_n = \sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}$; montrer que $\lim \frac{c_n}{b_n} = f(\beta)$.

2.4

Donner un DA à deux termes, lorsque x tend vers 1-0, de $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln n x^n$.

3 DSE et sommes

3.1

Développer en série entière, au voisinage de 0, les fonctions : $\sinh x \sin x$, $\mathrm{Arctg}(\mathrm{tg}(a)\frac{1+x}{1-x})$

dériver puis intégrer

3.2

Soit $\mu \in]0,1[$. On pose $I_\mu = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\mu^2 t^2)}}$. Donner un équivalent de I_μ lorsque μ tend vers 1.

$\mu = \sin\theta \to$ DVA série alterné $\Rightarrow$ WALLIS

3.3

Soit $\mathbf{K}$ un sous-corps de $\mathbf{C}$. Soit $F \in \mathbf{K}(X)$ une fraction rationnelle sans pôles en 0. Montrer que F est développable en série entière, puis que les coefficients du développement en série entière de F sont dans $\mathbf{K}$.

3.4

Sommer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3n!}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3-2n}{n!} z^n$, $\sum_{n>0} \frac{x^n}{n^2+n}$.

décompose

3.5

Convergence et somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} S_n \to \sum (-1)^n S_n x^n \to$$

produit de convolution
→ on intègre
APRÈS justification

où $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}$.

3.6

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f. On donne des entiers $p \geq 2$ et $1 \leq k \leq p-1$ Déterminer, pour $|z| < R$, $\sum a_n z^{pn+k}$ en fonction de f.

Racines de l'unité

$\zeta \in \mathbb{U}_p$

$f(\zeta^{?}) + f(\zeta z) + \dots + f(\zeta^{p-1} z)$ a_{pm+k}

$= \sum a_m z^{pm+k}$